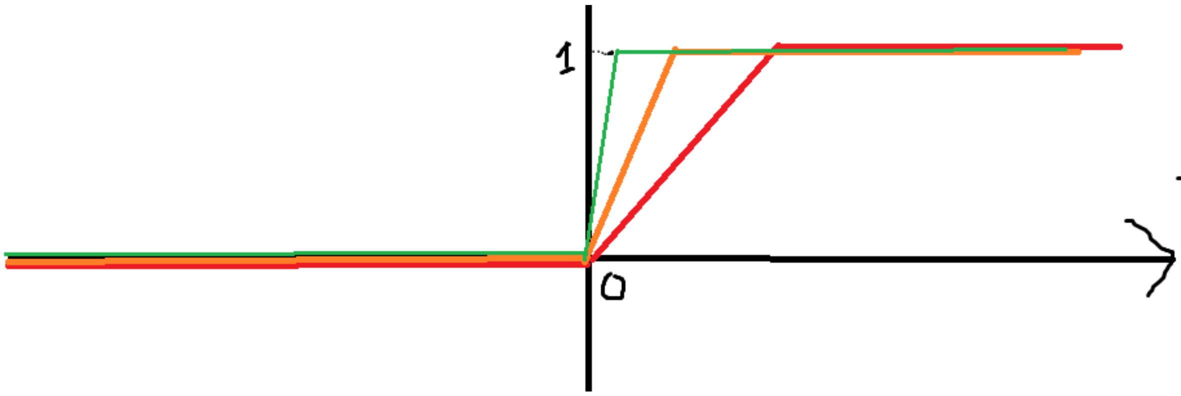
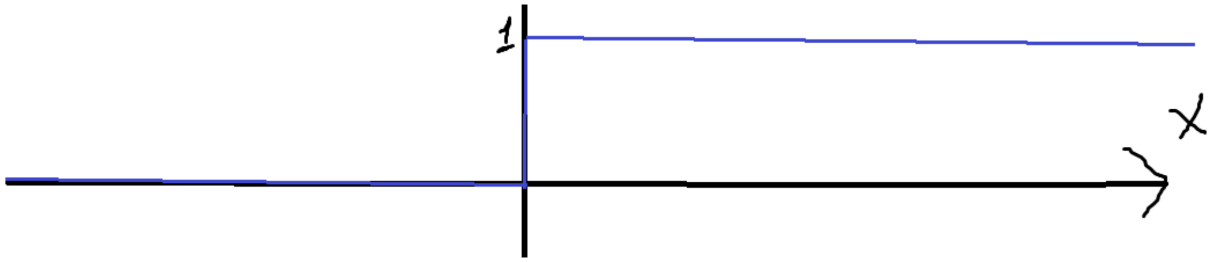
5. Что такое сходимость последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайных величин к случайной величине ξ по распределению? Сходится ли по распределению последовательность случайных величин ξ_k, равномерно распределённых на отрезке $[0, 1/k]$? Если да, то как распределена предельная случайная величина?

Если последовательность из интегральных функций распределения величин ξ_1, ξ_2, … сходится (определение сходимости последовательности функций у нас есть в матане-3), то в этом случае есть сходимость по распределению.

Давайте посмотрим, как выглядят графики интегральных функций распределения:



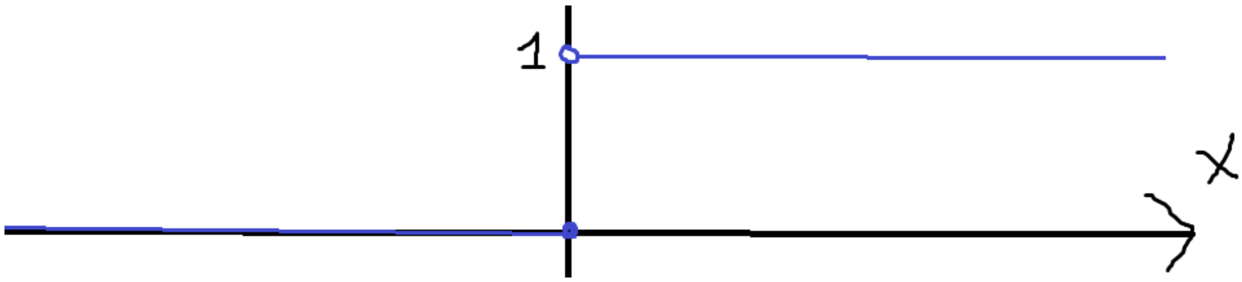
Поиграйтесь в Десмосе: https://www.desmos.com/calculator/bzxuw1rage
В пределе получим любимую функцию Вятчанина Сергея Петровича – функцию Хевисайда:



Предельная случая величина такая: 100% ноль ☺ и никаких других вариантов у неё нет.

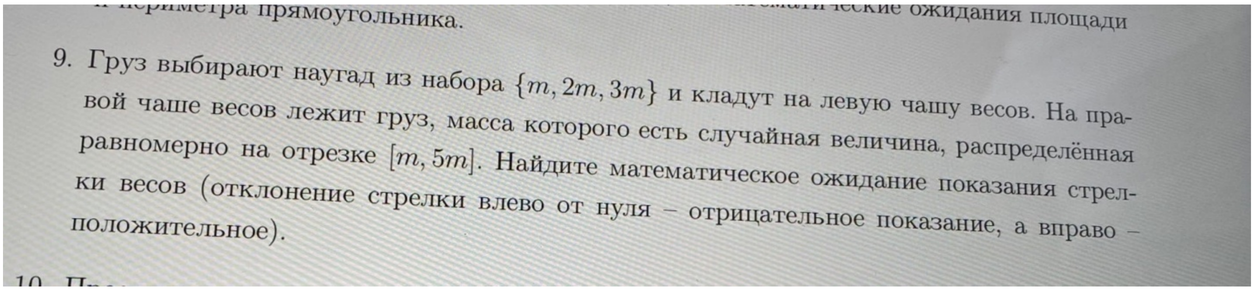
3. Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ любой случайной величины:
1) непрерывна в каждой точке;
2) непрерывна справа;
3) непрерывна слева;
4) может иметь разрывы первого или второго рода.
Укажите верные утверждения.

А возьмём функцию из прошлой задачи:



Уже видно, что она прерывна (значит, 1) неверно) и имеет разрыв 1-го рода (значит, 4) верно). А ещё она всегда непрерывна слева (верен пункт 3). А всегда ли она непрерывна справа? Нет. (пункт 2 неверен).

Всё дело в определении интегральной функции распределения: p(ξ<x), СТРОГО меньше! Давайте подставим x=0: p(ξ<0). Т.к. ξ всегда =0, то p(ξ<0)=0.
Вот если бы было бы другое определение - p(ξ<=x) (НЕСТРОГО меньше), то тогда бы в 0 значение интегральной функции распределения было бы 1, а не 0, т.к. p(0<=0)=1.
Но на ФФ принято определение именно с p(ξ<x), поэтому всегда есть непрерывность слева, а справа не всегда.


периметра прямоугольника. ... ческие ожидания площади

9. Груз выбирают наугад из набора $\{m, 2m, 3m\}$ и кладут на левую чашу весов. На правой чаше весов лежит груз, масса которого есть случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[m, 5m]$. Найдите математическое ожидание показания стрелки весов (отклонение стрелки влево от нуля – отрицательное показание, а вправо – положительное).

Давайте рассмотрим три случая.
1) Случай, когда мы выбрали груз массой m. Вероятность случая – 1/3.
В этом случае, какую бы мы случайную величину из промежутка [m…5m] не взяли, она перевесит. Значит, в этом случае вероятность перевеса правой части – 1.
2) Случай, когда мы выбрали груз массой 2m. Вероятность случая – 1/3.
В этом случае у нас уже есть некая неоднозначность:

На коричневой части отрезка перевесит правая чаша, на зелёной – левая.
Коричневый отрезок составляет ¾ от суммарного => в этом случае вероятность перевеса правой части – 3/4.
3) Случай, когда мы выбрали груз массой 3m. Вероятность случая – 1/3.
Аналогично

коричневый отрезок составляет половину от большого => в этом случае вероятность перевеса правой части – 1/2.

Итоговая вероятность перевеса правой части:

$$\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{3} * \frac{3}{4} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} * \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

А вероятность перевеса левой части тогда $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Теперь мы можем найти матожидание: $\frac{1}{4} * (-1) + \frac{3}{4} * 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

19. Как определяется попарная независимость событий $A_1, \ldots, A_n$ и их независимость в совокупности?

20. Известно, что A и B — независимые события. Можно ли утверждать, что при этом условии события $\bar{A}$ и $A \cap B$ также всегда независимы?

Нет. Второе событие - $A \cap B$ требует, чтобы одновременно выполнились и А, и В. А первое событие - $\bar{A}$ - как раз НЕ А. Если оно верно, второе событие «так, ну я тогда точно ложно – даже А не выполнено (чего уж говорить про В), я ложно!» О какой независимости может идти речь, если второе так сильно зависит от первого? ☺

Дадим более формальную запись доказательства:

P($A \cap B$|$\bar{A}$)=0.

Если они независимы, то P($A \cap B$|$\bar{A}$)=P($A \cap B$).

Получается, что P($A \cap B$)=0. Пересечение независимых событий А и В может быть нулевым лишь в случае, когда одно из них само нулевое (невозможное). Но в условии сказано «можно ли утверждать, что … ***всегда*** независимы»? Нет, нельзя! $\bar{A}$ и $A \cap B$ независимы лишь в очень редком, «вырожденном» случае.

4. Случайные величины ξ и η имеют математические ожидания $M\xi = M\eta = 1$, дисперсии $D\xi = D\eta = 2$ и коэффициент ковариации (ковариацию) $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 1$. Найдите $M(\xi - \eta)^2$.

$$\mathrm{M}(\xi - \eta)^2$$

Решение через центрированные величины.

Дам совет для решения задач подобного типа:

Центрируй величины!

Т.е. вместо ξ введём случайную величину x=ξ-Mξ, а вместо η рассмотрим случайную величину y=η-Mη. В данной задаче Mξ= Mη=1, поэтому x=ξ-1, y=η-1. Почему центрировать так полезно? Потому что ***дисперсия и ковариация от центрировки не меняются***:

Dx=Dξ=2

Dy=Dη=2

cov(x,y)=cov(ξ,n)=1

А вот формулы для дисперсий и ковариаций очень упрощаются:
Для нецетрированных: $D\xi=M(\xi-M\xi)^2$, $cov(\xi, \beta)=M[(\xi-M\xi)(\beta-M\beta)]$
Для центрированных: $D\xi=M\xi^2$, $cov(\xi, \beta)=M(\xi\beta)$
От нас требуют
$$\mathrm{M}(\xi-\eta)^2$$
Распишем через x и y:
$$\mathrm{M}(x+1-(y-1))^2=\mathrm{M}(x-y)^2$$
Формула квадрата разности:
$$\mathrm{M}(x^2-2xy+y^2)$$
Воспользуемся линейностью матожидания:
$$\mathrm{M}x^2-2Mxy+My^2$$
И как хорошо работать с центрированными величинами! Два слагаемых – это дисперсия, а среднее – ковариация.
$$\mathrm{M}x^2=Dx=2$$
$$\mathrm{M}y^2=Dy=2$$
$$Mxy=cov(x,y)=1$$
Ответ: 2-2*1+2=2

Решение без замен.
$$\mathrm{M}(\xi-\eta)^2$$
Очень хочется применить формулы квадрата разности:
$$\mathrm{M}(\xi^2-2\xi\eta+\eta^2)$$
Воспользуемся линейностью матожидания:
$$\mathrm{M}\xi^2-2\mathrm{M}\xi\eta+\mathrm{M}\eta^2$$
Начнём с крайних слагаемых. Это почти дисперсия:
$$D\xi=\mathrm{M}\xi^2-(\mathrm{M}\xi)^2=>\mathrm{M}\xi^2=\ D\xi+(\mathrm{M}\xi)^2=2+1^2=3$$
Аналогично
$$\mathrm{M}\eta^2=\ D\eta+(\mathrm{M}\eta)^2=2+1^2=3$$
Осталось среднее слагаемое.
$$cov(\xi,\eta)=M\xi\eta-M\xi M\eta=>M\xi\eta=cov(\xi,\eta)+M\xi M\eta=1+1*1=2$$
Считаем: 3-2*2+3=2.

Решение без замен кажется проще, но с центрировкой проще и очевидней, просто оно записывается дольше.

6. Проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p, вероятностью неудачи q. Чему равна вероятность того, что для достижения шестого успеха потребовалось не менее девяти испытаний?

Для 6-го успеха не менее девяти испытаний

⇔

После восьмого испытания у нас было не более 5 успехов.

Убедитесь, что эти формулировки эквивалентны. Но вторая яснее, с ней и будем работать. Давайте перебирать случаи – сколько успехов у нас было после 8 испытаний:

Было 0 успехов: 1 вариант (00000000). Вероятность q^8

Был 1 успех: 8 вариантов разместить единственный успех. Вероятность $8pq^7$

Было 2 успеха: C_8^2 вариантов разместить единственный успех. Вероятность $C_8^2p^2q^6$

Аналогично для 3,4,5 и успехов.

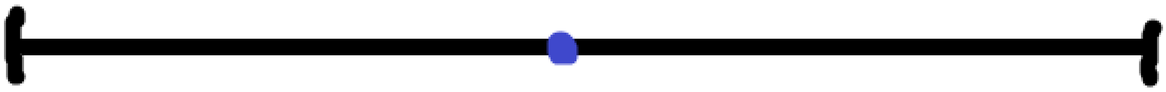
Итоговая вероятность складывается из случаев 0,1,2,3,4,5 успехов:

$$\sum_{j=0}^{5} C_8^j p^j q^{8-j}$$

1. Сигма-алгебра $\mathcal{F}$ подмножеств отрезка $[0,1]$ содержит все отрезки $[a,b]$ для $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Принадлежат ли этой сигма-алгебре одноточечные множества вида $\{x\}$ для $0 < x < 1$? Обоснуйте ответ.

Итак, мы знаем некоторых жителей сигмы-алгебры:

А от нас спрашивают, принадлежат ли сигма-алгебре множества вида:



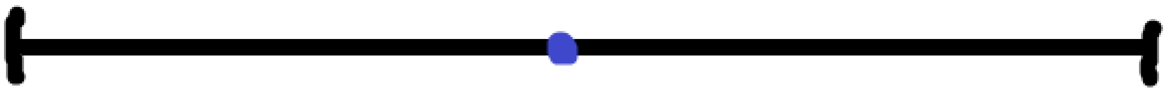
Как же нам, используя отрезки, получить точку? Эврика – пересечь отрезки с общими концами:

Мы пользуемся тем свойством, что

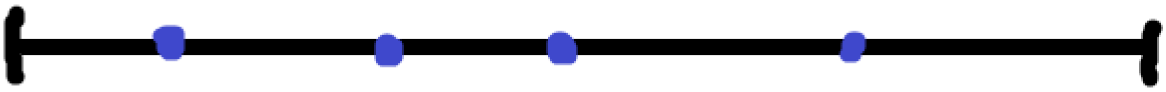
Пересечение событий из алгебры F принадлежит алгебре F

$$A, B \in F, \qquad AB = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in F.$$

Тем самым, если алгебре принадлежат красный и зелёный отрезок, то алгебре принадлежит и точка, являющаяся общей для них:



Замечание 1. Многоточечные множества



мы также вправе получить, т.к.

Если $A, B \in F$, то $A \cup B \in F$.

Замечание 2. Отметим момент в условии:

Принадлежат ли этой сигма-алгебре одноточечные множества вида $\{x\}$ для $0 < x < 1$?

Концы не включается! Это сделано специально, потому что $\{0\}$ и $\{1\}$ мы получить не можем, т.к. нет отрезков, для которых $\{0\}$ был бы правым концом, а $\{1\}$ левым.

6. Пусть $F(\cdot)$ – функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dF(x)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dF(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dF^2(x) = \frac{F^2(x)}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1^2 - 0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

7. Пусть графики функций распределения случайных величин ξ и 2ξ пересекаются при $x= 1$, а именно $F_\xi(1) = F_{2\xi}(1) = 1/2$. Чему равна $P(5/8< \xi <7/8)$?

Есть тождество, с помощью которого всё решается на раз-два:

$$F_{2\xi}(x) = F_\xi\left(\frac{x}{2}\right)$$

Но сперва надо бы его доказать.

Оттолкнёмся от того, что

$$p_{2\xi}(x)dx$$

по смыслу плотности вероятности

$$p_{2\xi}(x)dx = p[x < 2\xi < x + dx]$$

что можно переписать как

$$p_{2\xi}(x)dx = p[x < 2\xi < x + dx] = p\left[\frac{x}{2} < \xi < \frac{x}{2} + \frac{dx}{2}\right]$$

а это уже равно

$$p_{2\xi}(x)dx = p[x < 2\xi < x + dx] = p\left[\frac{x}{2} < \xi < \frac{x}{2} + \frac{dx}{2}\right] = \frac{dx}{2} p_\xi\left(\frac{x}{2}\right)$$

Коэф $\frac{1}{2}$ возникает из-за того, что $\frac{dx}{2}$, а не dx – вдвое меньше «окошко».

Получаем

$$p_{2\xi}(x) = \frac{1}{2} p_\xi\left(\frac{x}{2}\right)$$

Теперь свяжем $F_{\xi}(x)$ и $F_{2\xi}(x)$, доказав формулу:

$$F_{2\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{2\xi}(y)dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} p_{\xi}\left(\frac{y}{2}\right)dy = \int_{-\infty}^{x} p_{\xi}\left(\frac{y}{2}\right)d(\frac{y}{2}) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{2}} p_{\xi}(z)dz = F_{\xi}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Отлично, формулу доказали!

Нам дано, что

$$F_{\xi}(1) = F_{2\xi}(1) = \frac{1}{2}$$

Но согласно формуле, которую мы вывели

$$F_{2\xi}(1) = F_{\xi}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Получается, что

$$F_{\xi}\left(\frac{1}{2}\right) = F_{\xi}(1)$$

Т.е. интегральная функция распределения ξ от ½ до 1 не растёт! Значит, плотность вероятности там 0=> ξ не может принимать значения от ½ до 1. Ответ: 0.

Замечание. Формулу, которую мы доказали

$$p_{2\xi}(x) = \frac{1}{2}p_{\xi}\left(\frac{x}{2}\right)$$

можно записать в виде

$$2p_{2\xi}(2x) = p_{\xi}(x)$$

И именно в таком виде запомнить. Естественно, её можно обобщить для всех k>0:

$$kp_{k\xi}(kx) = p_{\xi}(x)$$

Очень красиво: все k в одной части.